

О ТЕОРИИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ КРИВЫХ В n -МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю. Г. Решетняк

1. ВВЕДЕНИЕ. В 1947-м году А. Д. Александров в докладе на заседании Московского математического общества сформулировал основные принципы теории кривых в 3-мерном евклидовом пространстве [1], обобщающей теорию кривых, известную из дифференциальной геометрии и включающую в рассмотрение нерегулярные кривые, например ломаные, т. е. кривые, составленные из конечного числа прямолинейных отрезков.

В настоящем сообщении автор описывает схему построения теории нерегулярных кривых в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , отличную от схемы, данной А. Д. Александровым в работе [1].

Схема автора основана на следующей идеологии. Сначала необходимо описать то множество объектов, которое должно быть предметом изучения теории нерегулярных кривых. Изучение свойств рассматриваемых объектов есть задача следующего этапа построения теории. В частности, установление того, каким образом различные характеристики кривых могут быть определены посредством приближения кривой ломаными, — задача этого этапа.

Традиционно теория кривых представляет собой один из начальных разделов дифференциальной геометрии, и ее содержание обычно укладывается в рамки одной лекции. В классической теории кривых в 3-мерном евклидовом пространстве, — в том виде, как она обычно излагается в курсах дифференциальной геометрии, — основные характеристики кривой $x(s)$ есть кривизна $k(s)$ и кручение $T(s)$ в точке $x(s)$, $0 \leq s \leq L$, кривой (параметр s — длина дуги).

Первая идея А. Д. Александрова состояла в том, чтобы рассматривать *интегральную кривизну* и *интегральное кручение*. При этом *интегральная кривизна* $\mathcal{K}(AB)$ дуги с концами в точках в $A = x(s_1)$ и $B = x(s_2)$ для кривой, удовлетворяющей условиям регулярности, принятым в дифференциальной геометрии, равна интегралу $\int_{s_1}^{s_2} k(s) ds$.

Аналогичным образом, *интегральное кручение* $\tau(AB)$ дуги кривой в регулярном случае равно интегралу $\int_{s_1}^{s_2} T(s) ds$.

Кривизна кривой в 3-мерном евклидовом пространстве всегда неотрицательна. Кручение, напротив, может принимать здесь значения разного

знака. В связи с этим целесообразно рассматривать также *абсолютное интегральное кручение кривой*, которое для регулярных кривых равно интегралу $|\tau|(AB) = \int_{s_1}^{s_2} |T(s)| ds$.

Вторая идея А. Д. Александрова состоит в том, что понятия интегральной кривизны и кручения в 3-мерном евклидовом пространстве должны определяться сначала для *ломаных*. Для произвольной кривой эти характеристики должны определяться путем аппроксимации кривой ломаными.

А. Д. Александровым были намечены общие контуры теории кривых, основанной на предлагаемом им подходе, и сформулированы основные задачи, решение которых должно было составить содержание этой теории. При этом, как указано выше, рассматривались только кривые в трехмерном евклидовом пространстве.

Реализацию программы А. Д. Александров поручил своим ученикам. Сначала этим занимался А. Я. Юсупов, которому принадлежит некоторое полезное наблюдение, касающееся понятия развертки сферической ломаной на сфере в 3-мерном пространстве.

Затем эту работу продолжил Ю. Г. Решетняк. Автору удалось показать, что решение задач, возникающих при построении теории кривых по А. Д. Александрову, может быть получено *применением методов интегральной геометрии*. Монография, в которой теория кривых была изложена в форме, соответствующей первоначальному замыслу А. Д. Александрова, была подготовлена к печати еще в 1962-м году. (К сожалению, по причинам технического характера, публикация монографии вышла в свет значительно позже, см. [2]; русское издание книги не публиковалось.)

Построение той части теории кривых, которая касается изучения интегральной кривизны и класса кривых ограниченной интегральной кривизны по схеме А. Д. Александрову для 3-мерного евклидова пространства, требует сравнительно простых средств и может быть представлено в достаточно прозрачной форме. Но уже при изучении вопросов, относящихся к *понятию интегрального кручения кривой*, необходимые доказательства оказываются достаточно тяжеловесными. Распространение теории нерегулярных кривых на многомерный случай, — если следовать первоначальной схеме А. Д. Александрова, — наталкивается на практически непреодолимые трудности.

Автором предлагается другая схема построения теории нерегулярных кривых в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , основанная на использовании двух геометрических конструкций. П е р в а я связана с понятием *сферической индикатрисы касательных кривой* (ранее введенным А. Д. Александровым). В т о р а я конструкция использует понятие *развертки сферической кривой*. Эти две конструкции позволяют определить тот класс объектов, изучение которых является задачей теории нерегулярных кривых.

Понятие развертки кривой, заданной в римановом пространстве, в ев-

клидово пространство строится с помощью понятия параллельного переноса. В работе автора [3] понятие *параллельного переноса вектора в пространстве аффинной связности распространено на случай нерегулярных кривых*. (Определение параллельного переноса вектора вдоль кривой равносильно построению подъема кривой в соответствующем расслоенном пространстве.)

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ КРИВОЙ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ. Понятие кривой в разных разделах математики трактуется по-разному. В связи с этим приведем то определение кривой, которое используется в данном сообщении. Формально определение автора эквивалентно классическому определению, данному М. Фреше, с той разницей, что здесь рассматриваются ориентированные кривые. Это позволяет придать точный смысл некоторым понятиям, относящимся к понятию кривой, обычно считающимся интуитивно ясными.

(Точное определение понятия кривой обычно несколько громоздко. В математике известен своего рода "закон сохранения трудностей", когда выигрыш, достигнутый на раннем этапе изучения того или иного математического объекта, приводит к усложнению изложения в дальнейшем.)

Пусть M есть метрическое пространство. Параметризованная кривая или путь в пространстве M есть непрерывное отображение $x : [a, b] \rightarrow M$ отрезка $[a, b]$ числовой прямой \mathbb{R} . Параметризованную кривую $x : [a, b] \rightarrow M$ будем называть *невыврожденной*, если множество $x([a, b])$ содержит хотя бы две различные точки.

Пусть $x : [a, b] \rightarrow M$ — путь в пространстве M . *Местом пути x* называется пара $X = (p, \sigma)$, где p есть точка множества $x([a, b])$ и σ — связная компонента множества $x^{-1}(p)$. Множество σ либо состоит из единственной точки, либо представляет собой замкнутый отрезок. Будем говорить, что точка p является *носителем места X* .

Пусть $X = (p, \sigma)$ и $Y = (q, \tau)$ есть два произвольных места пути x . Будем говорить, что X лежит левее Y , если для любых $t \in \sigma$ и $u \in \tau$ выполняется неравенство $t < u$. В этом случае мы будем писать $X < Y$.

Если места X и Y пути $x : [a, b] \rightarrow M$ таковы, что $X < Y$, то мы будем говорить, что Y лежит правее X и писать $Y > X$.

Пусть $x : [a, b] \rightarrow M$ и $y : [c, d] \rightarrow M$ — две параметризованные кривые в пространстве M , \bar{x} — множество мест пути x , \bar{y} — множество мест пути y .

Пути x и y называются *эквивалентными*, если существует биективное отображение $\varphi : \bar{x} \rightarrow \bar{y}$ такое, что для всякого $X \in \bar{x}$ носители мест X и $\varphi(X)$ совпадают. При этом, если $X < Y$, то $\varphi(X) < \varphi(Y)$. Если биективное отображение φ , удовлетворяющее указанным условиям, существует, то оно единственно.

Будем говорить, что φ есть *согласующее отображение* для путей $x : [a, b] \rightarrow M$ и $y : [c, d] \rightarrow M$.

Легко проверяется, что введенное так отношение эквивалентности в множестве путей пространства M рефлексивно, симметрично и транзитивно. В соответствии с этим множество всех параметризованных кривых пространства M распадается на классы эквивалентных путей. Кривая в пространстве M есть класс эквивалентности множества путей по данному отношению. Элементы этого класса называются *параметризациями кривой*.

Данное определение не исключает случай, когда путь x является вырожденным, т. е. множество $x([a, b])$ состоит из единственной точки. В этом случае множество \bar{x} мест пути x состоит из единственного элемента. При этом, если одна из данных параметризованных кривых $x : [a, b] \rightarrow M$ и $y : [c, d] \rightarrow M$ является вырожденной, то они будут эквивалентны в том и только в том случае, если также и вторая параметризованная кривая является вырожденной, причем $x([a, b]) = y([c, d])$.

Кривая называется *вырожденной*, если хотя бы одна из ее параметризаций есть вырожденная параметризованная кривая.

Пусть K — невырожденная кривая в пространстве M , $x : [a, b] \rightarrow M$ и $y : [c, d] \rightarrow M$ — две параметризации кривой K , $\varphi : \bar{x} \rightarrow \bar{y}$ есть согласующее отображение для параметризованных кривых x и y . Пусть $X \in \bar{x}$. Тогда X отвечает элемент $\varphi(X)$ множества \bar{y} . Так как согласующее отображение φ в случае, если оно существует, — единственно, то $X' = \varphi(X)$ по X определено однозначно. Будем говорить, что $X \in \bar{x}$ и $X' = \varphi(X) \in \bar{y}$ определяют одну и ту же точку P кривой K . Пусть $X = (p, \sigma)$. Тогда мы будем говорить, что σ есть множество значений параметра t , отвечающих точке P в параметризации $x : [a, b] \rightarrow M$. Точку $p \in M$ будем называть *носителем точки P кривой K* . Значения $t \in \sigma$ называются *значениями параметра*, отвечающими данной точке кривой K . Если $t \in \sigma$, то мы будем также употреблять выражение: *P есть точка $x(t)$ кривой K* .

На совокупности точек кривой естественно определяется *отношение порядка*. А именно, пусть P и Q — две произвольные точки кривой. Тогда мы будем говорить, что P лежит левее Q , если во всякой параметризации кривой K любое значение параметра, соответствующее точке P , меньше любого значения параметра, соответствующего точке Q . В этом случае будем писать $P < Q$ или, что равносильно, $Q > P$. Наименьший, в смысле данного отношения порядка, элемент множества точек кривой называется ее *началом*, наибольший элемент множества точек кривой называется *концом* кривой K . Отношение порядка естественным образом определяет на множестве точек кривой K некоторую топологию, базой которой являются всевозможные интервалы в множестве точек кривой.

На множестве всех кривых метрического пространства M может быть определена некоторая метрика. Пусть даны кривые K и L в пространстве M с метрикой ρ , и пусть $x : [0, 1] \rightarrow M$, $y : [0, 1] \rightarrow M$, — произвольные параметризации кривых K и L , соответственно. Положим

$$r(x, y) = \max_{t \in [0, 1]} \rho[x(t), y(t)].$$

Точная нижняя граница величины $r(x, y)$ относительно x и y называется *расстоянием* между кривыми K и L . Она обозначается символом $d(K, L)$. Функция $(K, L) \mapsto d(K, L)$ представляет собой некоторую метрику на множестве всех кривых метрического пространства M .

3. ПОНЯТИЕ ИНДИКАТРИСЫ КАСАТЕЛЬНЫХ КРИВОЙ В \mathbb{R}^n . Теория кривых, которая описывается здесь, изучает некоторые классы кривых в пространствах \mathbb{R}^n и \mathbb{S}^n . Определение этих классов использует понятие индикатрисы касательных.

Далее \mathbb{R}^n означает n -мерное векторное евклидово пространство, \mathbb{S}^{n-1} — единичную сферу в пространстве \mathbb{R}^n .

Простейший случай, когда кривая в \mathbb{R}^n допускает параметризацию $x(t)$, $a \leq t \leq b$, такую, что для всех $t \in [a, b]$ производная $x'(t)$ определена, причем вектор-функция $x'(t)$ непрерывна и $|x'(t)| \neq 0$ для всех $t \in [a, b]$. Полагаем

$$\mathbf{e}(t) = \frac{x'(t)}{|x'(t)|}.$$

Получим некоторую параметризованную кривую на сфере \mathbb{S}^{n-1} . Этим определена некоторая кривая Q на сфере \mathbb{S}^{n-1} . Кривая Q не зависит от выбора параметризации кривой K и называется *индикатрисой касательных кривой K* .

Известно, что длина индикатрисы касательных равна интегральной кривизне кривой.

Для наших целей необходимо уметь определять понятие индикатрисы касательных также и для некоторых негладких кривых.

Пусть K есть невырожденная кривая в пространстве \mathbb{R}^n , P и Q — две точки кривой K , не совпадающие пространственно, т. е. такие, что носитель p точки P и носитель q точки Q — различны. Тогда может быть определен некоторый вектор $\mathbf{e}(P, Q)$. Полагаем

$$\mathbf{e}(P, Q) = \begin{cases} \frac{q - p}{|q - p|}, & \text{если } P < Q, \\ \frac{p - q}{|q - p|}, & \text{если } P > Q. \end{cases}$$

Пусть X_0 есть точка кривой K и $(X_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ есть последовательность точек кривой K , сходящаяся к точке X . (Сходимость последовательности понимается как сходимость в смысле порядковой топологии, определенной на множестве точек кривой.)

Предположим, что при каждом ν носители точек X_ν и X_0 не совпадают. Тогда при каждом $\nu \in \mathbb{N}$ определен единичный вектор $\mathbf{e}_\nu = \mathbf{e}(X_\nu, X_0)$.

Если вектор \mathbf{e} является пределом последовательности векторов \mathbf{e}_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, то мы будем говорить, что \mathbf{e} является *частичным касательным ортом в точке X_0 кривой K* .

Определим некоторый класс кривых в пространстве \mathbb{R}^n , которые будем называть *односторонне гладкими кривыми*.

Пусть K есть невырожденная кривая в пространстве \mathbb{R}^n , A — начало кривой K , B — ее конец. Возьмем произвольно точку X_0 кривой K . Предположим, что $A < X_0$. Тогда для любых точек P и Q кривой K , не совпадающих пространственно, и таких, что $A \leq P \leq X_0$ и $A \leq Q \leq X_0$, — определен вектор $\mathbf{e}(P, Q)$.

Если векторы $\mathbf{e}(P, Q)$ сходятся к некоторому пределу, когда точки P и Q независимо стремятся к точке X_0 по дуге $[AX_0]$, то говорят, что кривая K имеет в точке X_0 *левую касательную в сильном смысле*.

Аналогично, если $X_0 < B$ и $\mathbf{e}(P, Q)$ сходится к некоторому пределу, когда P и Q стремятся к точке X_0 по дуге $[X_0B]$, то мы будем говорить, что кривая K имеет в точке X_0 *правую касательную в сильном смысле*.

Введем обозначения. Полагаем

$$\mathbf{t}_l(X_0, K) = \lim_{P, Q \rightarrow X_0, P < X_0, Q < X_0} \mathbf{e}(P, Q),$$

$$\mathbf{t}_r(X_0, K) = \lim_{P, Q \rightarrow X_0, P > X_0, Q > X_0} \mathbf{e}(P, Q).$$

Кривая K в пространстве \mathbb{R}^n называется *односторонне гладкой*, если в каждой своей точке X в случае, если X не является началом кривой, кривая имеет левую касательную в сильном смысле, а если X не является концом кривой K , то кривая имеет в этой точке также и правую касательную в сильном смысле.

Пусть X есть *внутренняя точка* односторонне гладкой кривой K , т. е. X не является ни началом, ни концом кривой K . Точка X называется *угловой*, если левая и правая касательная кривой в этой точке различны, $\mathbf{t}_l(X, K) \neq \mathbf{t}_r(X, K)$.

Если $\mathbf{t}_l(X, K) = \mathbf{t}_r(X, K)$, то мы будем говорить, что X есть гладкая точка кривой K . Точка X называется *точкой возврата*, если $\mathbf{t}_l(X, K) = -\mathbf{t}_r(X, K)$.

Предложение 1. Всякая односторонне гладкая кривая спрямляема и состоит из конечного числа простых дуг. Если K есть односторонне гладкая кривая и $x(s)$, $0 \leq s \leq L$, — ее параметризация, где параметр s есть длина дуги, то вектор-функция $x(s)$ имеет левую производную $x'_l(s)$ для всякого $s > 0$, а для любого $s < L$ существует правая производная $x'_r(s)$. При этом $|x'_l(s)| = |x'_r(s)| = 1$, и в каждой точке $s \in [0, L]$ справедливы соотношения:

$$\text{при } s > 0 : x'_l(s) = \lim_{t \rightarrow s-0} x'_l(t) = \lim_{t \rightarrow s-0} x'_r(t),$$

$$\text{при } s < L : x'_r(s) = \lim_{t \rightarrow s+0} x'_l(t) = \lim_{t \rightarrow s+0} x'_r(t).$$

Для всякого $\delta > 0$ — множество угловых точек односторонне гладкой кривой, в которых угол между левой и правой касательными больше δ , — конечно.

Из предложения 1, в частности, следует, что множество угловых точек односторонне гладкой кривой не более чем счетно.

Для произвольной односторонне гладкой кривой K в пространстве \mathbb{R}^n определим некоторую кривую $I(K)$ на сфере \mathbb{S}^{n-1} .

Кривая $I(K)$ определяется следующим образом. Пусть E есть множество всех угловых точек кривой K . Построим параметризацию $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ кривой K такую, что для всякой угловой точки X множество значений параметра t , отвечающих этой точке, представляет собой некоторый промежуток $[\alpha, \beta]$, где $\alpha < \beta$.

Теперь определим некоторую вектор-функцию $\mathbf{z}(t)$, $t \in [a, b]$. Если $X = x(t)$ есть гладкая точка кривой K , то мы полагаем

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{t}_l(X) = \mathbf{t}_r(X).$$

Предположим, что $X = x(t)$ есть угловая точка. Тогда вектор $\mathbf{z}(t)$ определяется следующим образом. Пусть $[\alpha, \beta]$, где $\alpha < \beta$ есть множество всех значений параметра t , которые отвечают точке X . Положим $\mathbf{z}(\alpha) = \mathbf{t}_l(X)$, $\mathbf{z}(\beta) = \mathbf{t}_r(X)$. Точки $\mathbf{z}(\alpha)$ и $\mathbf{z}(\beta)$ сферы \mathbb{S}^{n-1} соединим на сфере кратчайшей дугой окружности большого круга. Пусть $\tau(X)$ есть эта дуга.

Для $t \in [\alpha, \beta]$ значения функции $\mathbf{z}(t)$ определим из условия, что $t \in [\alpha, \beta] \mapsto \mathbf{z}(t)$ есть гомеоморфизм отрезка $[\alpha, \beta]$ и дуги $\tau(X)$.

Выполнив описанное построение для всех $t \in [a, b]$, мы получим некоторое отображение $t \mapsto \mathbf{z}(t)$ промежутка $[a, b]$.

Предложение 1 позволяет заключить, что это отображение непрерывно. Построенная таким образом вектор-функция $\mathbf{z}(t)$, где $t \in [a, b]$ определяет некоторую сферическую кривую Γ . Кривая Γ не зависит от выбора параметризации $x(t)$, $t \in [a, b]$, удовлетворяющей указанным ранее условиям, и называется *индикатрисой касательных кривой K* . Далее мы будем обозначать ее символом $I(K)$.

4. ПОВОРОТ КРИВОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ \mathbb{R}^n . Определим понятие поворота кривой и класс кривых конечного поворота.

Пусть K есть кривая в пространстве \mathbb{R}^n . Будем называть *цепочкой касательных ортов кривой K* всякую конечную последовательность ξ вида

$$\xi = \{(\mathbf{t}_0, X_0), (\mathbf{t}_1, X_1), \dots, (\mathbf{t}_m, X_m)\},$$

удовлетворяющую следующему условию: при каждом $i = 0, 1, 2, \dots, m$ вектор \mathbf{t}_i является частичным касательным ортом кривой K в точке X_i , и точки X_i таковы, что $X_i < X_{i-1}$ при каждом $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$. Векторы \mathbf{t}_i при этом называются *элементами цепочки ξ* , точки X_i — *узлами цепочки ξ* .

Будем говорить, что *цепочка касательных ортов ξ* лежит на дуге (PQ) кривой K , если все ее узлы принадлежат этой дуге.

Пусть дана произвольная цепочка ξ касательных векторов кривой K в пространстве \mathbb{R}^n ,

$$\xi = \{(\mathbf{t}_0, X_0), (\mathbf{t}_1, X_1), \dots, (\mathbf{t}_m, X_m)\}.$$

Полагаем

$$\varkappa(x, \xi) = \sum_{k=1}^m \angle(\mathbf{t}_{i-1}, \mathbf{t}_i).$$

Точная верхняя граница сумм $\varkappa(x, \xi)$ на множестве всех цепочек ξ кривой K называется *интегральной кривизной* или *поворотом*, или *интегральной кривизной кривой K* и обозначается далее символом $\varkappa_1(K)$. Определением допускается значение $\varkappa_1(K) = \infty$.

Следующее утверждение доказано в [2] и [3].

Теорема 1. Если поворот кривой K в пространстве \mathbb{R}^n конечен, то K есть односторонне гладкая кривая.

Для всякой односторонне гладкой кривой \mathbb{R}^n величина $\varkappa(K)$ равна длине индикатрисы касательных кривой K .

5. РАЗВЕРТКА СФЕРИЧЕСКОЙ КРИВОЙ. Определим понятие развертки сферической кривой. Сначала рассмотрим случай регулярных кривых. Пространство \mathbb{R}^{n+1} далее считаем ориентированным.

Предположим, что кривая K на сфере \mathbb{S}^n является регулярной класса \mathcal{C}^2 . Это означает, что кривая K допускает параметризацию $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^n$, которая является вектор-функцией класса \mathcal{C}^2 , причем $\mathbf{x}'(t) \neq 0$ для всех $t \in [a, b]$.

В дифференциальной геометрии определяется *понятие параллельного переноса вектора вдоль кривой*. Предположим, что для каждого $t \in [a, b]$ определен вектор $\xi(t)$, лежащий в касательной плоскости сферы в точке $\mathbf{x}(t)$. Условие — векторное поле $\xi(t)$ получено параллельным переносом вдоль кривой $\mathbf{x}(t)$ из вектора $\xi(a)$ — равносильно следующему: вектор-функция $\xi(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\xi'(t) + \langle \xi(t), \mathbf{x}'(t) \rangle \mathbf{x}(t) = 0. \quad (*)$$

Пусть P_0 есть подпространство \mathbb{R}^{n+1} , ортогональное вектору $\mathbf{x}(a)$. Ориентируем его так, что если

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$$

есть правый репер в гиперплоскости P_0 , то

$$\{\mathbf{x}(a), \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$$

есть правый репер в \mathbb{R}^{n+1} .

Зададим произвольно значение $u \in [a, b]$ и пусть $\xi(t, u)$ есть решение уравнения (*), удовлетворяющее условию $\xi(u, u) = \mathbf{x}'(t)$. Уравнение (*) линейно, откуда следует, что *задача Коши* $\xi(u) = \zeta$, где вектор ζ ортогонален $\mathbf{x}(u)$, и м е е т р е ш е н и е, определенное для всех $t \in [a, b]$. Мы полагаем $\eta(u) = \xi(a, u)$.

Вектор $\eta(u)$ формально получен из вектора $\mathbf{x}'(u)$ параллельным переносом в точку $\mathbf{x}(a)$ вдоль дуги кривой $\mathbf{x}(t)$, $t \in [a, b]$, соответствующей

значениям параметра $t \in [a, u]$. Вектор $\eta(u)$ принадлежит плоскости P_0 . Полагаем

$$\mathbf{y}(t) = \int_a^t \eta(u) du.$$

Вектор-функция $\mathbf{y}(t)$ определяет некоторую кривую L в плоскости P_0 . Эта кривая не зависит от выбора параметризации \mathbf{x} кривой K .

Плоскость P_0 изометрична пространству \mathbb{R}^n . Всякую кривую, которая является образом кривой L при сохраняющем ориентацию изометрическом отображении P_0 на \mathbb{R}^n , мы будем называть *разверткой кривой K в пространство \mathbb{R}^n* .

Развертка кривой допускает следующую интерпретацию. Предположим, что сфера \mathbb{S}^n катится по n -мерной плоскости, касаясь ее в точках кривой K . Тогда след, зачерчиваемый в плоскости точкой касания плоскости и сферы, и есть развертка кривой K .

Отметим, что описанные построения без каких-либо изменений переносятся на случай кусочно-регулярных кривых, т. е. таких кривых, которые можно разбить на конечное число дуг, каждая из которых является регулярной кривой. В частности, эти построения применимы к случаю, когда рассматриваемая кривая является сферической ломаной. Кривая K на сфере \mathbb{S}^n называется *сферической ломаной*, если можно указать конечную последовательность точек $X_0 < X_1 < \dots < X_{m-1} < X_m$ такую, что X_0 является началом кривой K , а X_m есть ее конец, и каждая из дуг $X_{i-1}X_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, является кратчайшей на сфере \mathbb{S}^n .

Понятие развертки кривой распространяется на случай нерегулярных кривых следующим образом. Развертка кривой определена с точностью до изометрического преобразования пространства \mathbb{R}^n . В связи с этим полезно несколько модифицировать понятие расстояния между кривыми. А именно, пусть K и L — две произвольные кривые в пространстве \mathbb{R}^n и P — изометрическое отображение пространства \mathbb{R}^n на себя, сохраняющее ориентацию. Положим

$$\Delta(K, L) = \inf_P d(K, PL),$$

где точная нижняя граница берется по множеству всех изометрических отображений пространства \mathbb{R}^n , сохраняющих ориентацию.

Пусть K есть кривая на сфере \mathbb{S}^n . Кривая R в пространстве \mathbb{R}^n называется *разверткой кривой K* , если она удовлетворяет следующему условию. Для всякой последовательности $(L_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ сферических ломаных, вписанных в кривую K и сходящихся к ней при $\nu \rightarrow \infty$, кривые $E(L_\nu)$ — развертки ломаных L_ν в пространстве \mathbb{R}^n — сходятся к кривой R в том смысле, что $\Delta[E(L_\nu), R] \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$.

Из результатов работ [5], [6] и [7] вытекают некоторые *достаточные условия существования развертки кривой*. Эти условия выполняются в частности в том важном для нас случае, когда кривая K — спрямляема.

Таким образом, всякая спрямляемая кривая на сфере \mathbb{S}^n имеет развертку в смысле данного здесь определения.

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КЛАССОВ $\mathcal{K}_m(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{K}_m(\mathbb{S}^n)$. Для пространств \mathbb{R}^n и \mathbb{S}^n определим по индукции классы кривых $\mathcal{K}_m(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{K}_m(\mathbb{S}^n)$, где $m = 0, 1, 2, \dots, n$.

Для $n = 1$ пространство \mathbb{R}^n совпадает с числовой прямой \mathbb{R} . Пусть $\mathcal{K}_0(\mathbb{R})$ есть множество всех спрямляемых кривых в \mathbb{R} . Если K есть спрямляемая кривая, то пусть $\varkappa_0(K)$ есть длина этой кривой. Символом $\mathcal{K}_1(\mathbb{R})$ обозначим множество всех *кривых конечного поворота* в пространстве \mathbb{R} . Для кривой $K \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R})$ пусть $\varkappa_1(K)$ есть поворот кривой K . Заметим, что в этом случае $\varkappa_1(K) = \pi k$, где $k \geq 0$ есть целое число. Для всякой кривой $K \in \mathcal{K}_0$ в прямой L может быть определено также некоторое число $(\varkappa)_0(K)$. Одномерное пространство \mathbb{R} естественным образом отождествляется с множеством вещественных чисел \mathbb{R} .

Пусть A есть начало кривой K , B ее конец, $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ — носители точек A и B , соответственно. Тогда $(\varkappa)_0(K) = b - a$.

Предположим, что для некоторого n классы \mathcal{K}_m кривых в пространстве \mathbb{R}^n определены для всех целых m таких, что $0 \leq m \leq n$, и для всякой кривой класса \mathcal{K}_m в пространстве \mathbb{R}^n определено неотрицательное вещественное число $\varkappa_m(K)$. Кроме того, будем считать, что для любой кривой $K \in \mathcal{K}_{n-1}$ определено некоторое число $(\varkappa)_{n-1}(K)$. В отличие от $\varkappa_{n-1}(K)$, величина $(\varkappa)_{n-1}(K)$ может быть как положительной, так и отрицательной.

Пусть K есть произвольная спрямляемая кривая на сфере \mathbb{S}^n . Будем говорить, что кривая K принадлежит классу \mathcal{K}_m , где $0 \leq m \leq n$, m — целое, если развертка $E(K)$ кривой K в пространстве \mathbb{R}^n есть кривая класса \mathcal{K}_m . В этом случае мы полагаем $\varkappa_m^g(K) = \varkappa_m[E(K)]$.

Если сферическая кривая K принадлежит классу \mathcal{K}_{n-1} , то определим еще величину $(\varkappa)_{n-1}^g(K)$, полагая ее равной $(\varkappa)_{n-1}[E(K)]$.

Пусть K есть кривая в пространстве \mathbb{R}^{n+1} . Пусть \mathcal{K}_0 есть совокупность всех спрямляемых кривых в пространстве \mathbb{R}^n , а \mathcal{K}_1 — множество всех кривых конечного поворота в пространстве \mathbb{R}^n . Пусть $1 < m \leq n + 1$.

Будем говорить, что кривая K принадлежит классу \mathcal{K}_m , если кривая K — односторонне гладкая и ее индикатриса касательных $I(K)$ принадлежит классу \mathcal{K}_{m-1} . (Так как $1 < m \leq n + 1$, то $0 < m - 1 \leq n$, и, значит, класс \mathcal{K}_{m-1} для сферы \mathbb{S}^n определен.) В этом случае мы полагаем $\varkappa_m(K) = \varkappa_{m-1}^g(K)$. Если кривая K не принадлежит классу \mathcal{K}_m , то далее мы будем считать, что для нее $\varkappa_m(K) = \infty$.

Таким образом, классы \mathcal{K}_m кривых в пространстве \mathbb{R}^{n+1} определены для любого целого m такого, что $0 \leq m \leq n + 1$.

Если кривая K в пространстве \mathbb{R}^{n+1} принадлежит классу \mathcal{K}_n , то индикатриса касательных $I(K)$ кривой K принадлежит классу \mathcal{K}_{n-1} , и, значит, определена величина $(\varkappa)_{n-1}^g[I(K)]$. Полагаем $(\varkappa)_n(K) = (\varkappa)_{n-1}^g[I(K)]$.

Отметим некоторые свойства введенных классов, непосредственно вытекающие из определения.

Предложение 2. Для всякого $m > 0$ и любого n справедливы включения

$$\mathcal{K}_m(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{K}_{m-1}(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{K}_m(\mathbb{S}^n) \subset \mathcal{K}_{m-1}(\mathbb{S}^n).$$

Заметим сначала, что второе включение предложения 2, в силу определения классов $\mathcal{K}_m(\mathbb{S}^n)$, вытекает из первого.

Для $n = 1$ имеем два класса: класс $\mathcal{K}_0(\mathbb{R})$ и класс $\mathcal{K}_1(\mathbb{R})$. Так как всякая кривая конечного поворота спрямляема, то

$$\mathcal{K}_1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{K}_0(\mathbb{R}).$$

Отсюда следует, что в случае $n = 1$ утверждение предложения 2 верно.

Предположим, что для некоторого n включения предложения 2 выполняются. Пусть K есть кривая класса \mathcal{K}_m в пространстве \mathbb{R}^{n+1} . Если $m = 1$, то кривая K — односторонне гладкая и, следовательно, спрямляема. Мы получаем, что

$$\mathcal{K}_1(\mathbb{R}^{n+1}) \subset \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Пусть $m > 1$. Тогда, по определению, индикатриса касательных $I(K)$ кривой K принадлежит классу $\mathcal{K}_{m-1}(\mathbb{S}^n)$. Имеем, согласно предположению индукции,

$$\mathcal{K}_{m-1}(\mathbb{S}^n) \subset \mathcal{K}_{m-2}(\mathbb{S}^n)$$

и, значит, $I(K) \in \mathcal{K}_{m-2}(\mathbb{S}^n)$, т. е. $K \in \mathcal{K}_{m-1}(\mathbb{R}^{n+1})$. По индукции предложение 2 доказано.

Предложение 3. Если кривая K в пространстве \mathbb{R}^n принадлежит классу $\mathcal{K}_m(\mathbb{R}^n)$, то и любая дуга кривой K , рассматриваемая как самостоятельная кривая в пространстве \mathbb{R}^n , также является кривой класса $\mathcal{K}_m(\mathbb{R}^n)$.

Это есть очевидное следствие определения понятий индикатрисы касательных и развертки кривой.

Предложение 4. Для всякой кривой класса $K \in \mathcal{K}_n$ в пространстве \mathbb{R}^n величина $\varkappa_n(K)$ равна πk , где $k \geq 0$ — целое число.

Справедливость данного утверждения легко устанавливается индукцией по n .

Если кривая K удовлетворяет условиям регулярности, принятым в дифференциальной геометрии, то она принадлежит каждому из классов \mathcal{K}_m , $m = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. При этом для случая $m < n - 1$ имеет место равенство $\varkappa_m(K) = \int_K k_m(s) ds$. Здесь $k_m(s)$ означает кривизну порядка m в точке кривой K , интегрирование ведется относительно длины дуги кривой K . Кривизна $k_{n-1}(s)$ порядка $n - 1$ может принимать значения произвольного знака. В данном случае имеем

$$(\varkappa)_{n-1}(K) = \int_K k_{n-1}(s) ds, \quad \varkappa_{n-1}(K) = \int_K |k_{n-1}(s)| ds.$$

Не приводя результатов, касающихся свойств кривых класса \mathcal{K}_m в пространстве \mathbb{R}^n для произвольного m , ограничусь следующими двумя теоремами, установленными в [2].

Теорема 2. Пусть K есть кривая в пространстве \mathbb{R}^n , \mathbf{u} — произвольный единичный вектор в пространстве \mathbb{R}^n , $\lambda_{\mathbf{u}}$ — прямая, состоящая из всех точек x вида $x = t\mathbf{u}$, где $t \in \mathbb{R}$. Символом $K_{\mathbf{u}}$ обозначим ортогональную проекцию кривой K на прямую $\lambda_{\mathbf{u}}$. Тогда имеет место равенство

$$\varkappa_1(K) = \frac{1}{\omega_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varkappa_1(K_{\mathbf{u}}) d\omega_{n-1}(\mathbf{u}),$$

где ω_{n-1} означает $n - 1$ -мерную меру Лебега на сфере \mathbb{S}^{n-1} .

Пусть G_n^2 есть множество всех двумерных подпространств пространства \mathbb{R}^n . На множестве G_n^2 естественным образом определяется структура дифференцируемого многообразия. Это есть известное *грассманово многообразие*.

На многообразии G_n^2 может быть определена мера, инвариантная относительно преобразований многообразия \mathbb{R}^n , порождаемых ортогональными преобразованиями пространства \mathbb{R}^n . Пусть μ есть такая мера на G_n^2 , нормированная условием $\mu(G_n^2) = 1$. Такая мера единственна.

Теорема 3. Пусть K есть кривая в пространстве \mathbb{R}^n , где $n > 2$, и K_P есть ортогональная проекция кривой K на двумерную плоскость P в \mathbb{R}^n . (Предполагается, что $0 \in P$, так что P есть элемент *грассманова многообразия* G_n^2 .) Тогда имеет место равенство

$$\varkappa_2(K) = \int_{G_n^2} \varkappa_2(K_P) d\mu(P).$$

Доказательства теорем 2 и 3 могут быть найдены, например, в монографии [2]. Там же даются разнообразные приложения этих теорем. Приведем здесь одно из таких приложений.

Пусть K есть кривая в пространстве \mathbb{R}^n . *Двойной цепью кривой K* назовем всякую пару ξ конечных последовательностей X_0, X_1, \dots, X_ν и Y_0, Y_1, \dots, Y_ν точек кривой K такую, что $X_0 < X_1 < \dots < X_\nu$, $Y_0 < Y_1 < \dots < Y_\nu$, и при каждом $i = 0, 1, 2, \dots, \nu$ $X_i < Y_i$, причем точки X_i и Y_i не совпадают пространственно, т. е. носители этих точек не совпадают. Пары (X_i, Y_i) будем называть *звеньями двойной цепи* ξ . Положим $\mathbf{a}_i = \overrightarrow{X_i Y_i}$ и пусть

$$\Pi(\xi) = \sum_{i=1}^{\nu} \angle(\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i).$$

Введем д в е х а р а к т е р и с т и к и двойной цепи. Пусть $\sigma(\xi)$ есть *наибольшее из целых чисел r* таких, что на кривой K найдется точка, принадлежащая r интервалам (X_i, Y_i) . Величину $\sigma(\xi)$ назовем *кратностью двойной цепи* ξ . Символом $\delta(\xi)$ обозначим *наибольший из диаметров дуг*

$[AX_1]$, $[X_i Y_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, \nu - 1$, $[Y_\nu B]$ (здесь A есть начало, B — конец кривой K). Величину $\delta(\xi)$ назовем *нормой двойной цепи* ξ .

Теорема 4. Пусть K есть произвольная кривая конечного поворота в пространстве \mathbb{R}^n . Тогда для всякой последовательности двойных цепей $(\xi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ кривой K , нормы которых стремятся к нулю, а кратности ограничены сверху постоянной $N < \infty$, не зависящей от ν , имеет место равенство $\varkappa_1(K) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \Pi(\xi_\nu)$.

Доказательство теоремы 4 также может быть найдено в [2].

Исследование свойств введенных здесь классов кривых $\mathcal{K}_m(\mathbb{R}^n)$ и, в частности, доказательство аналогов теорем 2 и 3 для интегральных кривизн высших порядков автор предполагает дать в последующих публикациях.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Александров А. Д. *Теория кривых на основе приближения ломаными* // Успехи мат. наук. 1947. Т. 2, № 4. С. 182–184.
- [2] A. D. Alexandrov, Yu. G. Reshetnyak. *General theory of irregular curves*. Amsterdam: Kluver Akad. Publ, 1989. [Zbl 0691.53002](#)
- [3] Александров А. Д., Решетняк Ю. Г. *Поворот кривой в n -мерном евклидовом пространстве* // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 1. С. 3–22. [Zbl 0656.53006](#)
- [4] Решетняк Ю. Г. *Некоторые применения интегральной геометрии к теории кривых конечного поворота* // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 1. С. 141–150. [Zbl 0656.53007](#)
- [5] Решетняк Ю. Г. *О параллельном переносе вдоль нерегулярной кривой в главном расслоении* // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 5. С. 1067–1090. [Zbl 0257.53035](#)
- [6] Решетняк Ю. Г. *О понятии подъема кривой в расслоенном многообразии и его приложениях* // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 3. С. 588–598. [Zbl 0333.53034](#)
- [7] Майник И. Ф. *О кривых в редуцированных пространствах* // Доклады АН СССР. 1977. Т. 235, № 3. С. 531–533. [Zbl 0378.53028](#)

Институт математики им. С. Л. Соболева, г. Новосибирск
e-mail: ugresh@math.nsc.ru